Concursul Chindia – In memoriam “Prof. Sorin Săileanu”
Ediţia a VIII-a, Târgovişte 12 mai 2012
Clasa a IX-a

Subiectul 1. a) Fie $P(n) = n^2 + an + b$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$. Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $P(n)P(n+1) = P(k)$.
b) Există $c, d \in \mathbb{Z}$ pentru care $Q(n) = n^2 + cn + d$ are proprietatea că pentru orice $n, k \in \mathbb{Z}$,

$$Q(n)Q(n+2) \neq Q(k)\ ?$$

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Subiectul 2. Fie $x, y, z > 0$ cu proprietatea că

$$x \cdot \sqrt[3]{2yz} + y \cdot \sqrt[3]{2zx} + z \cdot \sqrt[3]{2xy} \geq 2(x + y + z).$$

Demonstraţi că $x + y + z \geq 6$.

Lucian Tuţescu, Craiova

Subiectul 3. Fie ABC un triunghi, A', B', C' picioarele bisectoarelor din A, B, C şi G, G' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$. Demonstraţi că $GG' \parallel BC$ dacă şi numai dacă lungimile laturilor AB, BC, CA sunt în progresie geometrică.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Concursul Chindia – In memoriam “Prof. Sorin Săileanu”
Ediţia a VIII-a, Târgovişte 12 mai 2012
Clasa a IX-a BAREM

Subiectul 1. Oficiu………1 punct
a) Calculează produsul $P(n)P(n+1\ )$ (într-o formă oarecare)…………………………………………………3 puncte
Obţine $k = n + P(n)$……………………………………………………………………………………………………1 punct
Menţionează $Q(n) = n^2 + 2$ (sau orice alt exemplu corect)…………………………………………………2 puncte
$Q(n)Q(n+2) = (n+1)^4 + 2(n+1)^2 + 9$……………………………………………………………………………2 puncte
$(n+1)^4 + 2(n+1)^2 + 9 = ((n+1)^2 + 1)^2 + 8 \neq k^2 + 2$……………………………………………………1 punct

Subiectul 2. Oficiu………1 punct
$\sum x \cdot \sqrt[3]{2yz} \leq \sum x \cdot \frac{2+y+z}{3} = \frac{2}{3}(x + y + z + xy + yz + zx)$……………………………………………2 puncte
$\frac{2}{3}(x + y + z + xy + yz + zx) \geq 2(x + y + z)$, deci $xy + yz + zx \geq 2(x + y + z)$……………………………2 puncte
$(\sum x)^2 \geq 3 \sum xy$……4 puncte
$\geq 6 \sum x$, deci $\sum x \geq 6$……………………………………………………………………………………………1 punct

Subiectul 3. Oficiu………1 punct
$3\overrightarrow{GG'} = \sum \overrightarrow{GA'}$………………………………………………………………………………………3 puncte
$= \sum \frac{b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}}{b+c}$……………………………………………………………………………………1 punct
$= \sum a\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\right)\overrightarrow{GA}$……………………………………………………………………………1 punct
$= \sum \frac{a(2p+a)}{(a+b)(a+c)}\overrightarrow{GA} = \frac{1}{\prod(a+b)} \sum a(b+c)(2p+a)\overrightarrow{GA}$…………………………………1 punct
$3\prod(a+b)\,\overrightarrow{GG'} = [b(a+c)(2p+b) - a(b+c)(2p+a)]\overrightarrow{GB}$
$+[c(a+b)(2p+c) - a(b+c)(2p+a)]\overrightarrow{GC}$……………………………………………………………1 punct
Condiţia de paralelism este echivalentă cu
$c(a+b)(2p+c) + b(a+c)(2p+b) = 2a(b+c)(2p+a)$……………………………………………………1 punct
Obţine $a^2 = bc$……1 punct

Concursul Chindia – In memoriam “Prof. Sorin Săileanu”
Ediţia a VIII-a, Târgovişte 12 mai 2012
Clasa a X-a

Subiectul 1. Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| \leq \frac{1}{3}$. Demonstraţi că

$$\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} + \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \frac{1}{1-z} \leq \frac{1}{2}.$$

Dinu Teodorescu, Târgovişte

Subiectul 2. Fie $x > 1$. Demonstraţi că

$$1 + \frac{x}{\log_2(2^x - 1)} > \log_{4^x - 2^x + 1}(16^x + 4^x + 1).$$

Cristinel Mortici, Târgovişte

Subiectul 3. Determinaţi toate funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$xf(x+y) - yf(x-y) = g^2(x) + g^2(y), \quad \text{oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Concursul Chindia – In memoriam “Prof. Sorin Săileanu”
Ediţia a VIII-a, Târgovişte 12 mai 2012
Clasa a X-a BAREM

Subiectul 1. Oficiu...1 punct

$\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re}\frac{1}{1-z} + \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im}\frac{1}{1-z} \le \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}\sqrt{\operatorname{Re}^2\frac{1}{1-z} + \operatorname{Im}^2\frac{1}{1-z}}$..3 puncte

$= |z|\left|\frac{1}{1-z}\right|$...3 puncte

$\le \frac{1}{3|1-z|} \le \frac{1}{3\left|1-|z|\right|} = \frac{1}{3-3|z|} \le \frac{1}{2}$...3 puncte

Subiectul 2. Oficiu...1 punct

Cu $2^x = a$, avem echivalent $log_{a^2-a+1}(a^4+a^2+1) - 1 < log_{a-1}a$...4 puncte

$log_{a^2-a+1}\left(\frac{a^4+a^2+1}{a^2-a+1}\right) < log_{a-1}a$...1 punct

$log_{a^2-a+1}(a^2+a+1) < log_{a-1}a$..1 punct

$log_a(a^2+a+1) < log_{a-1}(a^2-a+1)$..1 punct

ceea ce este adevarat, pentru ca se scrie sub forma $f(a) < f(a-1)$, unde

funcţia $f(a) = log_a(a^2+a+1)$...1 punct

este descrescătoare, pentru că

$f(a) = 2 + log_a\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)$, cu $\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)$ descrescătoare...1 punct

Subiectul 3. Oficiu...1 punct

$x = y = 0 \Rightarrow g(0) = 0$ ....2 puncte

$y = 0 \Rightarrow xf(x) = g^2(x)$..1 punct

$x = 0 \Rightarrow -yf(-y) = g^2(y) = yf(y)$..1 punct

$xf(x+y) - yf(x-y) = xf(x) + yf(y)$...1 punct

$y \to -y \Rightarrow xf(x-y) + yf(x+y) = xf(x) - yf(-y) = xf(x) + yf(y)$...1 punct

$xf(x+y) - yf(x-y) = xf(x-y) + yf(x+y) \Rightarrow (x-y)f(x+y) = (x+y)f(x-y)$.....................1 punct

$f(x) = ax,\ a \ge 0$...1 punct

$g(x) = \sqrt{a}x,\ x \in A$ şi $g(x) = -\sqrt{a}x,\ x \in \mathbb{R} \setminus A$...1 punct

Rotary International

“Investim în inteligenţă”

Rotary Club Târgovişte, District 2241

Concursul Chindia – In memoriam “Prof. Sorin Săileanu”
Ediţia a VIII-a, Târgovişte 12 mai 2012
Clasa a XI-a

Subiectul 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a^2 + b^2 \leq 1$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Demonstraţi că

$$\det(I_2 + A) + \det(I_2 + A^2) + \det(I_2 + A^3) \geq \frac{4}{3}.$$

Alin Pohoaţă, Târgovişte

Subiectul 2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că

$$\lim_{n\to\infty} |2a_n - 1| = \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty} |4a_n + 2| = 3.$$

Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, convergent şi calculaţi limita sa.

Dorin Mărghidanu, Corabia

Subiectul 3. Fie şirul

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}}\,, \;\; n \geq 1.$$

Demonstraţi că:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1. \quad b)\ \lim_{n\to\infty} (x_n - n) = \frac{1}{4}\,. \quad c)\ \lim_{n\to\infty} n\left(x_n - n - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{24}\,.$$

Cristinel Mortici, Târgovişte

Concursul Chindia – In memoriam "Prof. Sorin Săileanu"
Ediţia a VIII-a, Târgovişte 12 mai 2012
Clasa a XI-a BAREM

Subiectul 1. Oficiu……1 punct

$z = a + bi$ şi $\det(I_2 + A) = |1+z|^2$……………………………………………………………………………4 puncte

$|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| \geq |1+z| + |1+z^2||z| + |1+z^3|$……………………………………………2 puncte

$\geq |1+z-z-z^3+1+z^3| = 2$………………………………………………………………………………………1 punct

$|1+z|^2 + |1+z^2|^2 + |1+z^3|^2 \geq \frac{1}{3}(|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3|)^2 \geq \frac{4}{3}$…………………………2 puncte

Subiectul 2. Oficiu……1 punct

Mărginirea………4 puncte

Dacă α este un punct limită, atunci $|2\alpha - 1| = \frac{1}{2}$ şi $|4\alpha + 2| = 3$…………………………………………………3 puncte

Rezultă $\alpha = \frac{1}{4}$, deci şirul este convergent către $\frac{1}{4}$, având un singur punct limită……………………………………2 puncte

Subiectul 3. Oficiu……1 punct

$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$, $x \in (0,1]$……………………………………………………………1 punct

$1 + \frac{k}{2n^2} - \frac{k^2}{8n^4} < \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} < 1 + \frac{k}{2n^2} - \frac{k^2}{8n^4} + \frac{k^3}{16n^6}$……………………………………………………………1 punct

$n + \frac{n+1}{4n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{48n^3} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} < n + \frac{n+1}{4n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{48n^3} + \frac{(n+1)^2}{64n^4}$………………………………………1 punct

a) ……3 puncte

b) ……2 puncte

c) ……1 punct

Concursul Chindia – In memoriam “Prof. Sorin Săileanu”
Ediţia a VIII-a, Târgovişte 12 mai 2012
Clasa a XII-a

Subiectul 1. Fie $n \geq 2$ un număr natural, liber de pătrate şi $\mathcal{M}$ o mulţime de divizori naturali ai lui n, având următoarele proprietăţi:
a) $1 \in \mathcal{M}$.
b) Pentru orice $d \in \mathcal{M}$, avem şi $n/d \in \mathcal{M}$.
c) Pentru orice $x, y \in \mathcal{M}$, avem şi $(x, y) \in \mathcal{M}$.
Demonstraţi că mulţimea $\mathcal{M}$ are 2^k elemente, unde k este un anumit număr natural.

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Subiectul 2. Fie $f: [0, \pi/4] \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$. Demonstraţi că

$$\int_0^{\pi/4} f^2(x)\, dx \cdot \int_0^{\pi/4} f^2(-x)\, dx > \frac{1}{4}.$$

Andrei Vernescu, Târgovişte

Subiectul 3. Fie $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Demonstraţi că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1 + n^2x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

*** * ***

Concursul Chindia – In memoriam "Prof. Sorin Săileanu"
Ediţia a VIII-a, Târgovişte 12 mai 2012
Clasa a XII-a

Subiectul 1. Oficiu..1 punct

Cu $n = p_1 p_2 \dots p_s$, funcţia $f: D_n \to \mathcal{P}(\{p_1, p_2, \dots, p_s\})$ dată prin $f(p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_t}) = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_t}\}$, $f(1) = \phi$, este bijectivă şi card $\mathcal{M}$ = card $f(\mathcal{M})$..3 puncte

$\phi \in f(\mathcal{M})$..1 punct

$X \in f(\mathcal{M}) \Rightarrow \complement_{\{p_1,\dots,p_s\}} X \in f(\mathcal{M})$..1 punct

$X, Y \in f(\mathcal{M}) \Rightarrow X \cap Y \in f(\mathcal{M})$..1 punct

Diferenţa simetrică este operaţie pe $f(\mathcal{M})$, adică $X, Y \in f(\mathcal{M}) \Rightarrow X \Delta Y \in f(\mathcal{M})$, deci $(f(\mathcal{M}), \Delta)$ este grup, subgrup în $(\mathcal{P}(\{p_1, p_2, \dots, p_s\}), \Delta)$ ....2 puncte

ord $f(\mathcal{M})$ divide ord $\mathcal{P}(\{p_1, p_2, \dots, p_s\}) = 2^z$..1 punct

Subiectul 2. Oficiu..1 punct

$\int_0^{\pi/4} f^2(x)\,dx \cdot \int_0^{\pi/4} f^2(-x)\,dx \geq \left(\int_0^{\pi/4} f(x) f(-x)\,dx\right)^2$..4 puncte

$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx\right)^2 = \frac{1}{4}$..5 puncte

Subiectul 3. Oficiu..1 punct

$I = I_n + J_n = \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{n f(x)}{1+n^2x^2} dx + \int_{1/\sqrt{n}}^{1} \frac{n f(x)}{1+n^2x^2} dx$..3 puncte

$I_n = f(c_n) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{n}{1+n^2x^2} dx = f(c_n) \arctan \sqrt{n} \to \frac{\pi}{2} f(0)$..3 puncte

$I_n = f(d_n) \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} \frac{n}{1+n^2x^2} dx \to 0$..3 puncte

Rotary International

"Investim în inteligenţă"

Rotary Club Târgovişte, District 2241